Convegno "Matematica e Cultura"
(Venezia, 30-31 Marzo 2001)

Matematica e Cultura 2002

Marco Li Calzi
Dipartimento di Matematica Applicata
Università "Ca' Foscari" di Venezia
Dorsoduro 3825/e, 30123 Venezia
Tel. 041-790925
Fax 041-5221756
email: licalzi@unive.it

Matematica ed esercizio della democrazia
L'urna di Pandora

Marco Li Calzi

«Non domandarci la formula che mondi possa aprirti,/ […] Codesto solo oggi possiamo dirti,/ ciò che non *siamo, ciò che* non *vogliamo»*

E. Montale (1923).

Introduzione

Secondo l'umanista Mario Equicola (c. 1470-1525), la democrazia è una "forma di governo in cui la sovranità risiede nel popolo, che la esercita per mezzo delle persone e degli organi che elegge a rappresentarlo". Quasi 500 anni dopo, lo Zingarelli [1] ripropone esattamente la stessa definizione. Noi la facciamo nostra per gli scopi di questo scritto.

Una componente essenziale della forma di governo democratica è che il popolo esercita la sua sovranità eleggendo persone ed organi. Dunque, un buon sistema elettorale è essenziale per il corretto funzionamento di una democrazia. La domanda che qui affrontiamo è se esistano (ed, in caso affermativo, quali siano) le procedure elettorali più adeguate a scegliere in modo “democratico” i rappresentanti del popolo.

Ci sono ragioni diverse per affrontare questa domanda. Una di queste è che talvolta le procedure elettorali vigenti anche in sistemi democratici avanzati conducono a risultati controversi. Ad esempio, nel novembre 2000 il popolo degli Stati Uniti d’America ha scelto come suo presidente il candidato che ha conquistato la maggioranza assoluta dei collegi elettorali, invece di quello che ha ottenuto la maggioranza relativa dei voti validi.

Un’altra ragione è che spesso problemi simili sono risolti con procedure elettorali molto diverse. Ad esempio, nel maggio 2001 i cittadini di molte grandi città italiane si sono recati alle urne per eleggere il loro sindaco e per partecipare (indirettamente) alla scelta del premier nazionale. Per la prima elezione si è adottato un semplice sistema a due turni con ballottaggio; per la seconda, invece, un metodo così complesso che di fatto alcuni voti del partito di maggioranza relativa sono stati utilizzati per eleggere rappresentanti dell’opposizione.

La ragione che qui ci spinge ad affrontare questa domanda attiene soprattutto al rapporto tra matematica e cultura. Il quesito sull’esistenza di procedure elettorali “migliori” ammette una risposta chiara ed accessibile ad ogni cittadino di media cultura. Tuttavia, anche se questa risposta è nota agli specialisti almeno da 25 anni, essa è sconosciuta alla gran parte dei cittadini a cui compete l’esercizio della sovranità.

Il motivo principale di questa sorprendente ignoranza risiede nella necessità di affrontare e risolvere il quesito procedendo secondo il *metodo matematico*. E' la scarsa familiarità con questo metodo che esclude moltissime persone dalla comprensione e dalla consapevolezza dei limiti delle procedure elettorali. Quanto speriamo di mostrare qui è che l'uso *del metodo matematico* è uno strumento potente di indagine anche nel campo dell'educazione civica.

Il caso con due opzioni

Cominciamo esaminando il caso in cui $n \geq 3$ elettori debbano scegliere fra due opzioni (o due candidati) a e b. Supponiamo che ogni elettore abbia un suo ordinamento individuale di preferenza sulle opzioni, in base al quale ne consideri una strettamente migliore dell'altra. Scriviamo $a > b$ per indicare che un elettore preferisce a a b.

Ad esempio, immaginiamo di avere sette elettori. Cinque di loro (che battezziamo 1, 2, 3, 4 e 5) preferiscono a a b mentre gli altri due (che battezziamo 6 e 7) preferiscono b ad a. Sintetizziamo questa situazione nella tabella

Esempio 1

Elettori	1, 2, 3, 4, 5	$a > b$	[5]
Elettori	6, 7	$b > a$	[2]

dove l'ultima colonna riporta il numero di elettori che condivide lo stesso tipo di preferenze individuali.

Una procedura elettorale è un metodo per aggregare le preferenze individuali di un insieme arbitrario di elettori in una scelta sociale, che indichiamo con S. La scelta sociale fra due opzioni può designare a, oppure b, oppure entrambi. In quest'ultimo caso, in realtà, la società si astiene dallo scegliere tra a e b e per designare il vincitore deve ricorrere a qualche forma di spareggio.

Quali proprietà dovrebbe soddisfare una procedura elettorale "democratica"? Un requisito che ci sembra molto ragionevole è che tutti gli elettori abbiano la stessa importanza. Possiamo esprimerlo mediante il seguente principio, che impone che l'identità degli elettori non sia un elemento determinante nella scelta sociale.

(**Anonimia**) Se scambiamo tra loro le preferenze di due elettori, la scelta sociale non dovrebbe cambiare.

Ad esempio, se nella situazione riassunta nell'Esempio 1 la scelta sociale fosse $S = a$, questa dovrebbe restare ancora a ove gli elettori 5 e 6 si scambiassero le loro preferenze e la situazione diventasse la seguente.

Esempio 2

Elettori	$1, 2, 3, 4, 6$	$a > b$	[5]
Elettori	$5, 7$	$b > a$	[2]

La procedura elettorale dittatoriale (dove la scelta sociale coincide con l'opzione preferita da un dato individuo) è incompatibile con il principio dell'anonimia.

Un secondo requisito ragionevole impone che neanche l'identità delle opzioni in corsa sia un elemento determinante nella scelta sociale.

In altre parole, i due candidati hanno *a priori* uguali possibilità di essere designati.

(**Neutralità**) Se una scelta sociale si scambiasse di posto con un'altra opzione in tutte le preferenze individuali, quest'ultima dovrebbe diventare una scelta sociale.

Ad esempio, se nella situazione riassunta nell'Esempio 1 la scelta sociale fosse $S = a$, questa dovrebbe diventare b nell'esempio seguente.

Esempio 3

Elettori	1, 2, 3, 4, 5	$b > a$	[5]
Elettori	6, 7	$a > b$	[2]

Possiamo definire l'anonimia e la neutralità come due principî di imparzialità. Il primo assicura che la procedura elettorale sia imparziale rispetto agli elettori ed il secondo che lo sia rispetto alle opzioni.

Le procedure elettorali imparziali sono numerose. La più famosa di queste è la regola di maggioranza assoluta, secondo la quale ogni elettore vota per una sola opzione e si designa come scelta sociale l'opzione più votata (che di necessità raccoglie almeno il 50% dei voti). Un'altra procedura imparziale è la regola di antimaggioranza, che invece designa l'opzione meno votata. Per caratterizzare univocamente una procedura elettorale, quindi, occorre fare ricorso ad un altro principio.

(**Concordanza**) Supponiamo che in una certa situazione la scelta sociale *S* sia *x*. Se uno o più elettori cambiano idea ed innalzano *x* nella loro scala di preferenze individuali, la scelta sociale non dovrebbe cambiare.

Il principio di concordanza richiede che un aumento del consenso intorno ad un'opzione non riduca le sue possibilità di essere scelta. Se nell'Esempio 1 la scelta sociale fosse *a* e l'elettore 6 invertisse le sue preferenze, *a* dovrebbe comunque restare la scelta sociale. Questo principio elimina la regola di antimaggioranza ed, in combinazione con i principî di imparzialità, è sufficiente a caratterizzare una procedura elettorale *unica*.

TEOREMA DI MAY (1952) Nel caso con due opzioni, l'unica procedura imparziale e concorde è la regola di maggioranza assoluta.

Il teorema di May [2] fornisce un fondamento chiaro all'idea diffusa che la scelta tra due opzioni a maggioranza assoluta sia un criterio ragionevole e "democratico". Inoltre, anche se questo risultato ha il pregio di combinare esistenza ed unicità, la regola di maggioranza assoluta gode di altre proprietà auspicabili. Ne presentiamo due su cui torneremo più avanti.

(**Coerenza**) Supponiamo che gli elettori siano divisi in due gruppi. Utilizzando la stessa procedura elettorale, il primo gruppo designa *x* ed il secondo *y*. Se *x*=*y*, questa dovrebbe restare la scelta sociale applicando la procedura elettorale anche a gruppi riuniti.

L'intuizione che sorregge questo principio è semplice. Fissiamo una procedura elettorale e supponiamo che sia la Camera sia il Senato (in sedute disgiunte) manifestino una preferenza per l'opzione a. Adesso immaginiamo di convocare la Camera ed il Senato in seduta congiunta per designare la scelta sociale. Il principio di coerenza impone che si confermi la scelta di a. La regola di maggioranza assoluta rispetta questo principio: se a ottiene la maggioranza assoluta sia alla Camera sia al Senato, allora la otterrà anche a camere riunite. Sorprendentemente, vedremo più avanti che questo semplice principio è violato da una procedura elettorale molto in voga.

Un'altra proprietà soddisfatta dalla regola di maggioranza assoluta è che, sotto di essa, nessuno può avere convenienza a mentire e votare per un'opzione diversa da quella che preferisce. Infatti, quando la scelta tra due opzioni si decide a maggioranza assoluta, ci sono solo due casi possibili: o il voto di uno specifico elettore è ininfluente (e allora tanto vale votare per l'opzione preferita), oppure esso è determinante per raggiungere la maggioranza (e allora è meglio votare per l'opzione preferita).

(**Sincerità**) Nessun elettore ha interesse a votare per un'opzione diversa dall'opzione preferita.

La richiesta che una procedura elettorale sia sincera esclude che un elettore preferisca basare il proprio voto su calcoli strategici invece di esprimere la sua opinione individuale. Una procedura di aggregazione dei voti può ambire a determinare una scelta sociale adeguatamente rappresentativa delle preferenze individuali soltanto se ogni elettore antepone l'espressione della propria opinione ad altre considerazioni. Dunque, la sincerità della procedura è una condizione necessaria per determinare la "volontà del popolo".

La maggioranza semplice

Nel caso con due opzioni, la regola di maggioranza assoluta emerge come procedura ottima perché soddisfa cinque proprietà desiderabili. Nel caso con $m \geq 3$ opzioni, tuttavia, questa regola risulta troppo spesso incapace di designare un vincitore e quindi non può essere adottata a fondamento delle scelte sociali. Tuttavia, possiamo esaminare se un'opportuna generalizzazione (di seguito vedremo le quattro più usate) non emerga come risposta al nostro originario quesito.

Un'ovvia generalizzazione della maggioranza assoluta è la regola di maggioranza relativa, secondo la quale ogni elettore vota per una sola opzione e si designa come scelta sociale l'opzione più votata (che può non raccogliere il 50% dei voti). Esaminiamo la ragionevolezza di questa procedura con riferimento ad un generico esempio, in cui immaginiamo di avere quattro opzioni a, b, c e d e 21 elettori.

Esempio 4

Elettori	1—3	$a > b > c > d$	[3]
Elettori	4—8	$a > c > b > d$	[5]
Elettori	9—15	$b > d > c > a$	[7]
Elettori	16—21	$c > b > d > a$	[6]

In questa situazione, la scelta sociale secondo maggioranza relativa è a.
Ci sono ragioni per ritenere che questa scelta sociale non generalizzi correttamente la regola di maggioranza assoluta. Queste difficoltà furono dibattute per la prima volta negli anni appena precedenti la Rivoluzione Francese da Jean-Charles Borda (1733-1799) e dal marchese di Condorcet (1743-1794). Curiosamente, i due studiosi si trovarono d'accordo nel disapprovare a, pur dissentendo ferocemente sui motivi per farlo e sulle possibili soluzioni.

Secondo Condorcet, l'essenza caratteristica della regola di maggioranza assoluta consiste nel basarsi sul confronto a coppie. Se nell'Esempio 4 limitassimo il voto a due opzioni, a perderebbe il confronto con b per 13 voti a 8; perderebbe con c per 13 a 8 e perderebbe con d per 13 a 8. Quindi, se dopo aver scelto a fosse indetto un referendum confermativo che opponesse a ad una qualsiasi delle altre opzioni, a sarebbe sempre bocciata!

Per evitare questo tipo di problemi, secondo Condorcet una buona procedura elettorale non dovrebbe mai eleggere un'opzione che risulta perdente in tutti i confronti a coppie. Anzi, rafforzando questa richiesta, egli propone il seguente criterio.

(**Condorcet**) La scelta sociale dovrebbe essere l'opzione (se esiste) che risulta vincente in tutti i confronti a coppie.

Nel caso dell'Esempio 4, ad esempio, il criterio di Condorcet indicherebbe come scelta sociale l'opzione *c*, che batte *a* per 13 a 8, batte *b* per 11 a 10 e batte *d* per 14 a 7. Ne segue che il criterio di Condorcet non è soddisfatto dalla regola di maggioranza relativa.

Questa regola non soddisfa neanche il criterio di sincerità: nell'Esempio 4, gli elettori 16—21, per evitare la designazione di *a*, troverebbero nel loro interesse convogliare su *b* i loro voti (invece che su *c*, la loro prima scelta) ed eleggere questa insieme agli elettori 9—15.

Gli altri quattro principî risultano invece soddisfatti. Riassumendo, quindi, la regola di maggioranza relativa non soddisfa due criterî su sei.

Il conteggio di Borda

Diversamente da Condorcet, Borda ritiene che l'essenza caratteristica della regola di maggioranza assoluta consista nella capacità di designare l'opzione gradita a più persone. Tuttavia, nell'Esempio 4, a fronte di una minoranza di 8 elettori che favorisce *a*, la regola di maggioranza relativa non riesce a dare voce agli altri 13 elettori che invece la detestano. Inoltre, se conveniamo di definire "gradita" ad un individuo un'opzione che si collochi al primo o al secondo posto nella scala delle sue preferenze, troviamo subito che nell'Esempio 4 *a* risulta gradita soltanto ad 8 elettori, mentre *b* risulta gradita a ben 16 elettori (anche se per tre di questi la prima scelta è *a*).

Per evitare questo tipo di esiti, Borda propone una procedura alternativa (nota come "conteggio di Borda") in base alla quale ogni elettore assegna $s(k) = m\text{-}k$ punti alla k-ma opzione nella sua scala di preferenze individuali. Risulta designata come scelta sociale l'opzione che totalizza la somma di punti più alta. Come la maggioranza relativa, anche questa procedura si riduce alla regola di maggioranza assoluta nel caso con due opzioni.

Nell'Esempio 4, il conteggio di Borda attribuisce 24 punti ad a, 44 a b, 38 a c e 20 a d. Attribuendo pesi diversi ad ogni opzione in funzione della sua posizione nella scala delle preferenze individuali, il conteggio riconosce che b gode di maggiori consensi. Si noti che il vincitore secondo Condorcet dovrebbe essere c e quindi che il conteggio di Borda non soddisfa il criterio di Condorcet.

Ancora l'Esempio 4 mostra che neanche la proprietà di sincerità è soddisfatta. Se gli elettori 16—21 si accordassero per piazzare strategicamente b all'ultimo posto, il risultato del conteggio vedrebbe c al primo posto con 38 punti e b al secondo posto con 32. Poiché questi elettori preferiscono c a b, essi avrebbero tutto l'interesse a pretendere che b non sia per loro la seconda opzione in ordine di preferenza.

Il conteggio di Borda si estende facilmente ad un più generale metodo a classifica se si richiede che il punteggio assegnato da ciascun elettore alla k-ma opzione sia espresso da una funzione decrescente $s(k)$. In questo modo, si può vedere la regola di maggioranza relativa come un caso speciale di metodo a classifica dove $s(1)=1$ ed $s(k)=0$ per $k>1$. Naturalmente, per non violare il principio di anonimia, occorre che la funzione $s(k)$ sia la stessa per ogni elettore.

Si può mostrare che qualsiasi metodo a classifica soddisfa i primi quattro principî ma non quelli di Condorcet e di sincerità. Per ragioni di spazio, qui mostriamo soltanto che il criterio di Condorcet è incompatibile con i metodi a classifica. Consideriamo il seguente esempio con tre opzioni e 17 elettori, tratto da [3].

Esempio 5

Elettori	1—6	$a > b > c$	[6]
Elettori	7—9	$c > a > b$	[3]
Elettori	10—13	$b > a > c$	[4]
Elettori	14—17	$b > c > a$	[4]

Il vincitore secondo Condorcet è a. Tuttavia, qualsiasi metodo con classifica designa invece b perché a totalizza soltanto $6s(1)+7s(2)+4s(3)$, che è sempre inferiore al punteggio $8s(1)+6s(2)+3s(3)$ realizzato da b.

Il ballottaggio al secondo turno

Un'altra generalizzazione della regola di maggioranza assoluta prevede di far votare ogni elettore per una sola opzione, facendo ricorso ad un secondo turno di ballottaggio tra le due opzioni più votate nel caso in cui nessuna opzione ottenga la maggioranza assoluta al primo turno. In pratica, questa procedura utilizza la regola di maggioranza relativa per selezionare due opzioni tra le quali poi sceglie a maggioranza assoluta.

Tra i nostri sei principî, questa procedura non ne rispetta addirittura quattro. Ricorrendo al solito Esempio 4, possiamo verificare che non soddisfa i criterî di Condorcet e di sincerità. Infatti, il ballottaggio designa b mentre il vincitore di Condorcet è c. Inoltre, anticipando che un ballottaggio sincero designerebbe b, gli elettori 4—8 preferiscono votare c e garantirne la designazione per maggioranza assoluta al primo turno.

Il terzo principio non soddisfatto dal metodo con ballottaggio è il criterio di coerenza, come mostra il seguente esempio con tre opzioni e 26 elettori.

Esempio 6

Elettori	1—4	$a > b > c$	[4]
Elettori	5—7	$b > a > c$	[3]
Elettori	8—10	$c > a > b$	[3]
Elettori	11—13	$c > b > a$	[3]
Elettori	14—17	$a > b > c$	[4]
Elettori	18—20	$b > a > c$	[3]
Elettori	21—23	$c > a > b$	[3]
Elettori	24—26	$b > c > a$	[3]

Se i primi 13 elettori votassero separatamente con il metodo del ballottaggio, accederebbero al secondo turno a e c e la scelta sociale sarebbe a. Analogamente, votando separatamente con il metodo del ballottaggio, la scelta sociale dei secondi 13 elettori sarebbe ancora a. Tuttavia, se gli elettori votassero tutti insieme con il metodo del ballottaggio, accederebbero al secondo turno b e c (escludendo a) e la scelta sociale sarebbe b.

La procedura di ballottaggio è molto utilizzata, presumibilmente perché si ritiene che consenta agli elettori di non "sprecare" il voto dato al primo turno e di correggere il tiro al secondo turno. Anche se quest'ultimo fa uso della maggioranza assoluta (su cui fornisce precise garanzie il teorema di May), si noti tuttavia che la selezione dei candidati ammessi al secondo turno è fatta con la regola di maggioranza relativa. Se essa non è giudicata un buon metodo generale per designare la scelta sociale, non è evidente perché dovrebbe essere usata per scegliere i due contendenti ammessi al secondo turno. Come mostra l'Esempio 6, infatti, la selezione degli ammessi è un elemento cruciale del processo di scelta.

Per questa ragione, fallisce anche il principio di concordanza, come mostra il seguente esempio con tre opzioni e 17 elettori, dove a e b accedono al ballottaggio, che è vinto da a per 11 voti a 6.

Esempio 7

Elettori	1—6	$a > b > c$	[6]
Elettori	7—11	$c > a > b$	[5]
Elettori	12—15	$b > c > a$	[4]
Elettori	16—17	$b > a > c$	[2]

Supponiamo che gli elettori 16 e 17 cambino idea e che la loro scala di preferenze individuali diventi $a > b > c$ (ovvero, che a passi per loro dal secondo al primo posto senza modificare l'ordinamento tra le altre opzioni). Ripetendo l'elezione, adesso accederebbero al ballottaggio a e c, ma c vincerebbe l'elezione per 9 voti a 8.

Eliminazioni successive

L'ultima generalizzazione della regola di maggioranza assoluta che qui consideriamo rimette al centro i confronti a coppie. Più precisamente, la procedura ad eliminazioni successive prevede le opzioni siano esaminate seguendo l'ordine fissato da una data agenda. La vincente tra le prime due opzioni avanza al turno successivo, dove è contrapposta alla terza opzione dell'agenda; la vincente in questo nuovo confronto è esaminata contro la quarta opzione dell'agenda; e così via, designando come scelta sociale la vincente dell'ultimo confronto. Vediamo un esempio con quattro opzioni e cinque elettori.

Esempio 8

Elettori	1—2	$a > b > c > d$	[2]
Elettore	3	$b > c > d > a$	[1]
Elettori	4	$d > b > a > c$	[1]
Elettori	5	$d > c > a > b$	[1]

Se l'agenda fosse *(abcd)*, dopo aver battuto b per 3 voti a 2, a andrebbe al confronto con c vincendolo ancora per 3 a 2; quindi, nel confronto finale, perderebbe 3 a 2 contro d, che risulterebbe la scelta sociale.

Questa procedura soddisfa soltanto tre dei nostri sei principî: anonimia, concordanza e Condorcet. La neutralità cade perché l'ordine con cui si compare nell'agenda risulta determinante. Nell'Esempio 8, tenendo ferma l'agenda *(abcd)*, se la scelta sociale d si scambiasse di posto con a in tutte le scale di preferenze individuali, la scelta sociale non diventerebbe a ma resterebbe d. Di fatto, il fallimento della neutralità può conferire a chi fissa l'agenda il potere di manipolare il risultato: nell'Esempio 8, se il voto è sempre sincero, l'agenda *(abcd)* conduce a scegliere d, l'agenda *(bdac)* conduce ad a, l'agenda *(adbc)* a b e l'agenda *(abdc)* a c.

Per mostrare che neanche la sincerità è soddisfatta dalla procedura per eliminazioni successive, si consideri l'Esempio 8 sotto l'agenda (*abcd*). Se l'elettore 1 vota *b* nella prima votazione, può fare avanzare al primo turno *b* invece di *a*; se tutti gli altri elettori votano sinceramente nei turni successivi, questo assicura che la scelta sociale sia *b* invece di *d*. Poiché l'elettore 1 preferisce *b* a *d*, questi ha interesse a non votare sinceramente. Naturalmente, poiché anche altri elettori possono votare in modo non sincero, non possiamo prevedere che cosa sarà effettivamente scelto.

Quanto al principio di coerenza, si consideri un esempio con tre opzioni e 15 elettori.

Esempio 9

Elettori	1—4	$a > b > c$	[4]
Elettori	5—7	$b > c > a$	[3]
Elettori	8—9	$c > a > b$	[2]
Elettori	10—11	$c > b > a$	[2]
Elettori	12—13	$b > a > c$	[2]
Elettori	14—15	$a > c > b$	[2]

Sia data l'agenda (*abc*). Separatamente presi, i primi nove elettori designano *c*; analogamente, gli ultimi sei elettori designano *c*. Presi congiuntamente, i 15 elettori designano *a*.

Due risultati generali

Conveniamo di chiamare "perfettamente democratica" ogni procedura elettorale che soddisfi i sei principî enunciati sopra. Nel caso con due opzioni, la regola di maggioranza assoluta è perfettamente democratica. Nel caso con più opzioni, invece, nessuna delle quattro generalizzazioni che abbiamo considerato risulta perfettamente democratica. Naturalmente, ciò non basta ad escludere che si possa congegnare una procedura elettorale perfettamente democratica anche nel caso di più opzioni. Tuttavia, riesce naturale il sospetto che potrebbe non esisterne nessuna.

Come possiamo confermare questo sospetto? Certamente non per via empirica: controllare che neanche una di mille procedure elettorali diverse è perfettamente democratica non ci aiuta affatto ad escludere che se ne possa trovare una. Se vogliamo stabilire in modo certo che non esiste nessuna procedura elettorale perfettamente democratica, dobbiamo procedere con il *metodo matematico* e dimostrare che nel caso con più opzioni i sei principî sono logicamente incompatibili fra loro.

Questo tipo di approccio allo studio della democraticità delle procedure elettorali fu introdotto verso la metà del secolo XX da Arrow [4], premio Nobel per l'Economia nel 1972. I due risultati che qui a noi interessano, invece, sono stati ottenuti circa 25 anni dopo.

Il primo risultato [5] mostra che due dei nostri principî sono logicamente incompatibili.

TEOREMA DI YOUNG (1975)) Nel caso con tre o più opzioni, non esiste nessuna procedura elettorale che soddisfi simultaneamente il criterio di coerenza ed il criterio di Condorcet.

Qualsiasi siano le nostre opinioni sulla rilevanza dei principî di coerenza e di Condorcet ai fini di una procedura elettorale democratica, non è possibile soddisfarli entrambi. Analogamente, il risultato successivo [6, 7] mostra che altri tre dei nostri criterî sono logicamente incompatibili.

TEOREMA DI GIBBARD E SATTERTHWAITE (1973) Nel caso con tre o più opzioni, l'unica procedura neutrale e sincera è la dittatura (che non è anonima).

Combinati insieme, questi due teoremi implicano che non esiste nessuna procedura elettorale che soddisfi più di quattro dei sei criteri sopra elencati. Nessuna assemblea costituzionale, per quanto avveduta, può sperare di trovare un sistema elettorale che risponda adeguatamente a tutte le esigenze incarnate nei sei principî.

Ciò ha due conseguenze importanti. Primo, qualunque sia la procedura elettorale in atto, possiamo sempre costruire situazioni che la facciano apparire "paradossale" rispetto ad un criterio opportunamente scelto. Secondo, in base a quali principî siano di volta in volta considerati prioritari, si può pervenire all'istituzione di procedure elettorali molto diverse. Un caso esemplare è la coesistenza di regole diverse per le elezioni nazionali e locali del maggio 2001 in Italia.

Conclusioni

Il quesito da cui siamo partiti chiede se esistano procedure elettorali adeguate a scegliere in modo "democratico" i rappresentanti del popolo.

Nel caso con due opzioni, la regola di maggioranza assoluta fornisce una soluzione pienamente soddisfacente. Invece, nel caso con tre o più opzioni, nessuna procedura elettorale può davvero ambire a tale titolo.

Pertanto, anche se la democrazia consiste nell'esercizio della sovranità del popolo, non è in generale possibile concretare questa definizione in una procedura elettorale scevra da critiche. Come possiamo conciliare questo risultato di impossibilità con la necessità pratica di fare esercitare al popolo la sua sovranità?

La risposta che noi preferiamo distingue due concezioni diverse della democrazia [8]. Entrambe condividono il principio di sovranità del popolo. Tuttavia, secondo la concezione populista, il popolo è depositario di una "volontà" che si manifesta come esito di una procedura elettorale. Il risultato dell'elezione rivela che cosa vuole il popolo e non può essere messo in discussione senza minacciare la sua sovranità. E' facile intuire come questa visione corra il rischio di condurre alla tirannia della maggioranza.

Al contrario, la concezione liberale ritiene che la sovranità del popolo consiste più modestamente nel preservare la possibilità di non confermare la scelta precedente. L'esito della procedura elettorale è sempre soggetto alla critica ma deve essere rispettato. Lo stesso rispetto va esteso anche alle opzioni scartate, preservando intatto per queste il diritto di competere alle elezioni successive e scalzare l'opzione precedentemente scelta.

Secondo questa visione, la sovranità del popolo si afferma nel diritto di criticare i suoi rappresentanti durante una legislatura e di cambiarli al termine di questa. L'epigrafe che abbiamo scelto (pur se riferita ad altro contesto) sintetizza in modo efficace le radici di questa concezione: davanti ad un risultato teorico di impossibilità, l'atteggiamento pratico migliore è coltivare il dubbio socratico.

Riferimenti bibliografici

[1] N. Zingarelli (1995), *Vocabolario della lingua italiana*, dodicesima edizione, a cura di M. Dogliotti e L. Rosiello, Zanichelli, Bologna

[2] K. May (1952), "A set of independent necessary and sufficient conditions for simple majority decisions", *Econometrica* 20, pp. 680-684

[3] P.C. Fishburn (1984), "Discrete mathematics in voting and group choice", *SIAM Journal of Algebraic and Discrete Methods* 14, pp. 119-134

[4] K. Arrow (1951), *Social choice and individual values*, Wiley, New York (seconda edizione: 1963)

[5] H.P. Young (1975), "Social choice scoring functions", *SIAM Journal of Applied Mathematics* 28, pp. 824-838

[6] A. Gibbard (1973), "Manipulation of voting schemes: A general result", *Econometrica* 41, pp. 587-601

[7] M.A. Satterthwaite (1975), "Strategy-proofness and Arrow's conditions: Existence and correspondence theorems for voting procedures and social welfare functions", *Journal of Economic Theory* 10, pp. 198-217

[8] W.H. Riker (1982), *Liberalism against populism*, Waveland Press, Prospect Heights, Illinois